A N A L Y S E

On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle x. On introduit les sous espaces vectoriels $\mathcal{P}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) de $\mathcal{P}$ formés des polynômes de degré au plus égal à n.

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels. On rappelle que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

C_0 désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur [0,1]. On définit une application φ de $C_0 \times C_0$ vers $\mathbb{R}$ par :

$\forall f \in C_0, \forall g \in C_0$:

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \omega(x)\,dx.$$

où ω désigne une fonction continue sur [0,1]
avec $\omega(x) > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$.

I- 1) Montrer que φ est un produit scalaire réel sur C_0.
Quelle est la norme induite par φ ?

Soit f une fonction de C_0. Le but de cette partie I est de construire le polynôme P^* de $\mathcal{P}_n$, vérifiant la propriété de minimisation suivante :

$$(A) \int_0^1 (P^*(x) - f(x))^2\, \omega(x)dx \le \int_0^1 (Q(x) - f(x))^2\, \omega(x)\, dx \qquad \forall Q \in \mathcal{P}_n.$$

I - 2) Réécrire (A) en utilisant la définition de φ.

I - 3) Montrer que (A) est équivalente à (B) :

$$(B)\ \varphi(P^* - f, R) = 0 \qquad \forall R \in \mathcal{P}_n.$$

I - 4) Montrer que si P^* existe alors il est unique.

I - 5) Soit $P^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, l'expression de P^* dans la base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n$.

Montrer que les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ satisfont le système linéaire suivant :

$$(S) \quad \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j c_{j+k} = d_k \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, n \right\}$$

avec $c_i = \int_0^1 x^i \cdot \omega(x)\, dx$ et $d_k = \int_0^1 x^k f(x)\, \omega(x)\, dx$

Déduire de I-3) et I-4) que P^* existe.

I - 6) Dans le cas particulier où $\omega(x) = 1$, écrire la matrice H_{n+1} du système (S).

Résoudre (S) pour $n = 2$ et $f(x) = e^x$.

II <u>Polynômes orthogonaux</u>

Le polynôme P_i de degré i est dit orthogonal sur [0,1] par rapport à $\omega(x)$ continue > 0, $\forall x \in [0,1]$ si et seulement si :

$$\int_0^1 P_i(x)\, x^j\, \omega(x)\, dx = 0 \quad \forall j = 0, \ldots, i-1$$

avec $P_i(x) = x^i + \ldots$

II - 1) Montrer que P_i existe pour tout $i \in \mathbb{N}$.
(On pourra faire une récurrence sur i).

II - 2) Montrer que toutes les racines de P_i sont simples et appartiennent à [0,1].

II - 3) Montrer que P_i, P_{i+1} et P_{i-1} sont liés par la relation de récurrence suivante :

$$(R) \quad P_{i+1}(x) = (x + B_{i+1})\, P_i(x) - C_{i+1}\, P_{i-1}(x)$$

où B_{i+1} et C_{i+1} sont des réels.

II - 4) Exprimer B_{i+1} et C_{i+1} à l'aide de $\gamma_i = \int_0^1 P_i^2(x)\, \omega(x)\, dx$,

$\delta_i = \int_0^1 x\, P_i^2(x)\, \omega(x)\, dx$.

Montrer que C_{i+1} est positif.

II - 5) Déduire de la relation (R) que les polynômes P_i et P_{i+1} n'ont pas de racine commune.

II - 6) Expression de P^* (voir I) dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$.

Montrer que $P^* = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x)$

avec $\alpha_i = \gamma_i^{-1} \int_0^1 f(x)\ P_i(x)\ \omega\ (x)\ dx$

II - 7) Montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2\ \gamma_i \leq \varphi(f,\ f)$.

que peut-on dire de la suite $\left(\sqrt{\gamma_i}\ \alpha_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$?

II - 8) Si $\omega = 1$ sur $[0,1]$, trouver P_0, P_1, P_2 puis trouver le polynôme P^* pour $n = 2$ et $f(x) = e^x$.

III <u>Approximants de Padé.</u>

On considère la fonction suivante :

$$g(t) = \int_0^1 \frac{1}{1-xt}\ \omega(x)dx,\ \omega \text{ continue},\ \omega(x) > 0,\ \forall\ x \in [0,1]$$

III - 1) Montrer que g est holomorphe dans $\mathbb{C} - [1, +\infty[$.

III - 2) Ecrire le développement en série de Taylor de g en $t = 0$. Quel est son rayon de convergence ?

III - 3) On veut maintenant construire une fraction rationnelle interpolant g en $t = 0$ à l'ordre maximal c'est-à-dire :

$$\frac{P(t)}{Q(t)} - g(t) = 0\ (t^{P+q+1}),\ P \in \mathcal{P}_p,\ Q \in \mathcal{P}_q$$

Si $q = 0$ que représente $P(t)/Q(t)$?

On suppose désormais que $q = n$ et $p = n - 1$.

III - 4) Montrer que le polynôme $\tilde{Q}$ défini par :

$\tilde{Q}(t) = t^n\ Q(t^{-1})$ satisfait :

$\int_0^1 \tilde{Q}(t)\ x^k\ \omega(x)dx = 0 \quad k = 0,\ \ldots\ n - 1.$

En déduire que $\tilde{Q}$est le polynôme orthogonal de degré n par rapport à ω sur $[0,1]$.

III - 5) Où sont situés les pôles de la fraction rationnelle $P(t)/Q(t)$ si $q = n$ et $p = n - 1$.